เฉลยการบ้านครั้งที่ 3

1. โจทย์กำหนดให้ free point charge q อยู่ภายใต้อิทธิพลของ monochromatic electric field $\vec{E} = Eexp(-i\omega t)\hat{x}$ เราสามารถเขียน equation of motion ของ point charge q มวล m ในแนวแกน x ได้เป็น

$$m\ddot{x} = F_x \qquad (1)$$

เมื่อ F_x คือ *driving force* ที่เกิดจาก *coulomb force*

$$m\ddot{x} = q\ Eexp(-i\omega t) \qquad (2)$$

สมมติให้ solution ของ equation of motion เขียนได้เป็น $x = Xexp(-i\omega t)$

หา $\ddot{x}$ และแทนกลับเข้าไปในสมการที่ (2) เราจะพบว่า

$$X = -\frac{qE}{m\omega^2} \qquad (3)$$

ดังนั้นการกระจัดของ free point charge นี้เขียนได้เป็น

$$x = Xexp(-i\omega t) = \left(-\frac{qE}{m\omega^2}\right) exp(-i\omega t) \qquad \mathit{(4)}$$

เมื่อสนามไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ผ่านตัวกลางตัวกลางที่เดิมประกอบด้วย neutral atoms ผลของแรง coulomb ทำให้เกิด dipole moment (qx) โดยผลรวมของ dipole moment ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรคือ polarization density เขียนได้เป็น

$$\vec{P} = Nq\vec{x} \qquad (5)$$

เมื่อ N คือจำนวน charge ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

เมื่อแทน (4) ใน (5) จะได้

$$\vec{P} = \left(-\frac{Nq^2E}{m\omega^2}\right) exp(-i\omega t)\hat{x} = \left(-\frac{Nq^2\vec{E}}{m\omega^2}\right) \qquad (6)$$

เนื่องจากสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นภายในตัวกลางเขียนได้อยู่ในรูปของ electric displacement D ตามสมการ

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad (7)$$

หรือ

$$\varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \left(-\frac{Nq^2\vec{E}}{m\omega^2}\right)$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m\omega^2} \qquad (8)$$

ด้วยการแทน $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$: relative permittivity หรือ dielectric constant และ $\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}$: plasma frequency

สมการที่ *(8)* เขียนได้เป็น

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (9)$$

#

2.

Equation of motion สำหรับ ระบบ forced mass spring damping เขียนได้เป็น

$$\ddot{x} + 2\alpha\omega\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 A_0 \cos\sigma t$$

โดยมี solution เขียนได้เป็น

$$x = \frac{A_0\left[1-\left(\sigma^2/\omega^2\right)\right]\cos\sigma t + 2A_0\alpha\left(\sigma/\omega\right)\sin\sigma t}{\left(1-\left(\sigma^2/\omega^2\right)\right)^2 + 4\alpha^2\left(\sigma^2/\omega^2\right)} + A_0 e^{-\alpha\omega t}\cos\left[\left(1-\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}\omega t - \varepsilon\right]$$

2.1 จงวาดกราฟเฉพาะ steady state response ของระบบ forced mass spring damping นี้

2.2 จงวาดกราฟคร่าว ๆ แสดงการเปลี่ยนแปลงเฉพาะ amplitude ของ steady state response กับ σ/ω สำหรับค่า $\alpha = 0, 0.2, 0.4$ และ 1.0

2.1 วิธีแก้ปัญหาข้อนี้คือ พิจารณาเฉพาะเทอม steady state และจัดรูปใหม่

เนื่องจาก steady state ที่โจทย์ให้มาเขียนอยู่ในรูปของ $x = a\cos\sigma t + b\sin\sigma t$ ดังนั้นเราจะจัดสมการนี้ให้อยู่ในรูป $x = C\cos(\sigma t - \phi)$ เมื่อ $C^2 = a^2 + b^2$ และ $\tan\phi = \frac{a}{b}$

เราพบว่า $a = \frac{A_0[1-(\sigma^2/\omega^2)]}{(1-(\sigma^2/\omega^2))^2 + 4\alpha^2(\sigma^2/\omega^2)}$ และ $b = \frac{2A_0\alpha(\sigma/\omega)}{(1-(\sigma^2/\omega^2))^2 + 4\alpha^2(\sigma^2/\omega^2)}$

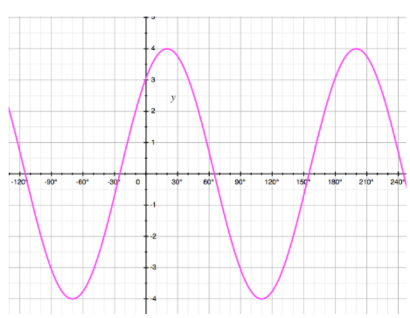
$$\therefore C = \frac{A_0}{\left\{\left(1-(\sigma^2/\omega^2)\right)^2 + 4\alpha^2(\sigma^2/\omega^2)\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{และ } \tan\phi = \frac{1-(\sigma^2/\omega^2)}{2\alpha\,\sigma/\omega}$$

$\therefore$ สมการสำหรับ *steady state* เขียนได้เป็น

$$x = \frac{A_0}{\left\{\left(1-(\sigma^2/\omega^2)\right)^2 + 4\alpha^2(\sigma^2/\omega^2)\right\}^{\frac{1}{2}}}\cos\left(\sigma t - \tan^{-1}\left\{\frac{1-(\sigma^2/\omega^2)}{2\alpha\sigma/\omega}\right\}\right)$$

กราฟของ steady state response จะเป็นกราฟของ cosine คล้ายรูปข้างล่าง โดยมี initial phase เป็น ϕ และ amplitude เป็น C



2.2 วาดกราฟโดยใช้โปรแกรมจะได้รูปข้างล่าง